

# Преобразование Гильберта в среде LabVIEW

Олег GERМАНОВИЧ,  
д. т. н., профессор  
Виктор ЛИФЕРЕНКО,  
д. т. н., профессор  
Сергей ЛЕБЕДЕВ

На протяжении многих десятилетий в рамках радиоэлектроники разрабатываются и совершенствуются методы обработки сигналов, а также методы их анализа и выделения полезной информации. Среди них особое место занимает преобразование Гильберта.

## Преобразование Гильберта

Преобразованием Гильберта сигнала  $s(t)$  называется интегральное преобразование вида:

$$\hat{s}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(\lambda)}{t-\lambda} d\lambda \equiv \Gamma[s(t)], \quad (1)$$

где несобственный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, то есть:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{s(\lambda)}{t-\lambda} d\lambda \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \int_{-\infty}^{t-\varepsilon} \frac{s(\lambda)}{t-\lambda} d\lambda + \int_{t+\varepsilon}^{+\infty} \frac{s(\lambda)}{t-\lambda} d\lambda \right). \quad (2)$$

В настоящее время преобразование Гильберта является весьма эффективным инструментом обработки сигналов и выделения разнообразной полезной информации. Так, например, преобразование Гильберта широко используется в такой быстро развивающейся области, как подповерхностное зондирование, где его применение позволяет уточнить информацию, содержащуюся в отраженном сигнале, и оказывает существенную помощь в расшифровке радарограмм.

## Аналитический сигнал

Преобразование Гильберта позволяет сформировать из анализируемого сигнала — действительной функции времени  $s(t)$  — аналитический сигнал:

$$\psi(t) = s(t) + j\hat{s}(t).$$

В результате в распоряжении исследователя оказываются три функции времени:

- мгновенная амплитуда (огibaющая сигнала):

$$\omega(t) = |\psi(t)| = \sqrt{s^2(t) + \hat{s}^2(t)}; \quad (3)$$

- мгновенная частота:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\omega(t)} \left[ s(t) \frac{d\hat{s}(t)}{dt} - \hat{s}(t) \frac{ds(t)}{dt} \right]; \quad (4)$$

- мгновенная фаза:

$$\varphi(t) = \arctan \frac{\hat{s}(t)}{s(t)}. \quad (5)$$

При расшифровке радарограмм последние две функции дают дополнительную и существенную информацию, позволяющую детализировать структуру наблюдаемого объекта, отражаемую радарограммой при подповерхностном зондировании.

Действительно, если мгновенная амплитуда, соответствующая огibaющей анализируемого сигнала, позволяет выделить на радарограмме области, отличающиеся друг от друга энергией отраженного сигнала, то мгновенная частота позволяет дополнительно выделить области с различным частотным составом спектра отраженного сигнала, а мгновенная фаза — выделить на радарограмме области отражений, не отличающиеся заметно ни по амплитуде, ни по частотному спектру, но имеющие существенный фазовый сдвиг в сравнении с соседними областями радарограммы.

Все это наглядно свидетельствует о полезности применения преобразования Гильберта для детального анализа сигналов.

## Алгоритмическая реализация

Эффективная алгоритмическая реализация преобразования Гильберта на практике [1] опирается на соотношения:

$$\Gamma[\sin\omega t] = \cos\omega t, \\ \Gamma[\cos\omega t] = -\sin\omega t.$$

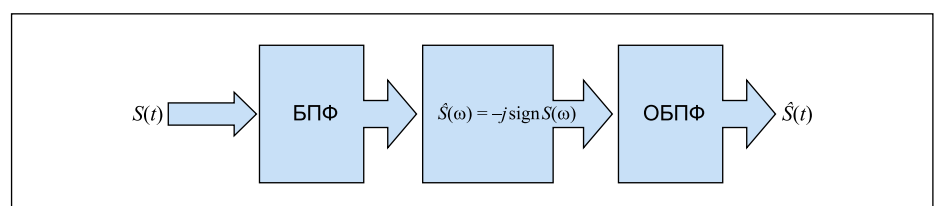


Рис. 1. Эффективный алгоритм преобразования Гильберта

Поэтому, если сигнал представлен в форме разложения в ряд Фурье, то у сигнала, преобразованного по Гильберту, меняются местами действительная и мнимая части спектра, и спектр сигнала, преобразованного по Гильберту  $\hat{S}(t)$ , можно записать так:

$$\hat{S}(\omega) = -j \text{sign}(\omega) S(\omega). \quad (6)$$

С учетом (6) алгоритм вычисления преобразования Гильберта, используя дискретное (быстрое) преобразование Фурье (БПФ), можно представить в виде, показанном на рис. 1.

Следует отметить, что практическая реализация эффективного алгоритма преобразования Гильберта для получения важной и содержательной информации об анализируемом сигнале требует выполнения преобразований в натуральном масштабе времени для различных по сложности и структуре сигналов. Это обстоятельство накладывает определенные дополнительные ограничения на прикладные программы, осуществляющие реализацию эффективного алгоритма преобразования Гильберта.

Все перечисленные выше требования в полной мере удовлетворяются пакетом прикладных программ LabVIEW. Кроме того, следует отметить, что пакет прикладных программ LabVIEW оснащен рядом сервисных подпрограмм, позволяющих визуализировать результаты численных расчетов и представить их в удобной для пользователя форме.

В статье описана процедура использования пакета прикладных программ LabVIEW [3] и приведен ряд примеров его применения для решения задач, имеющих практическую значимость.

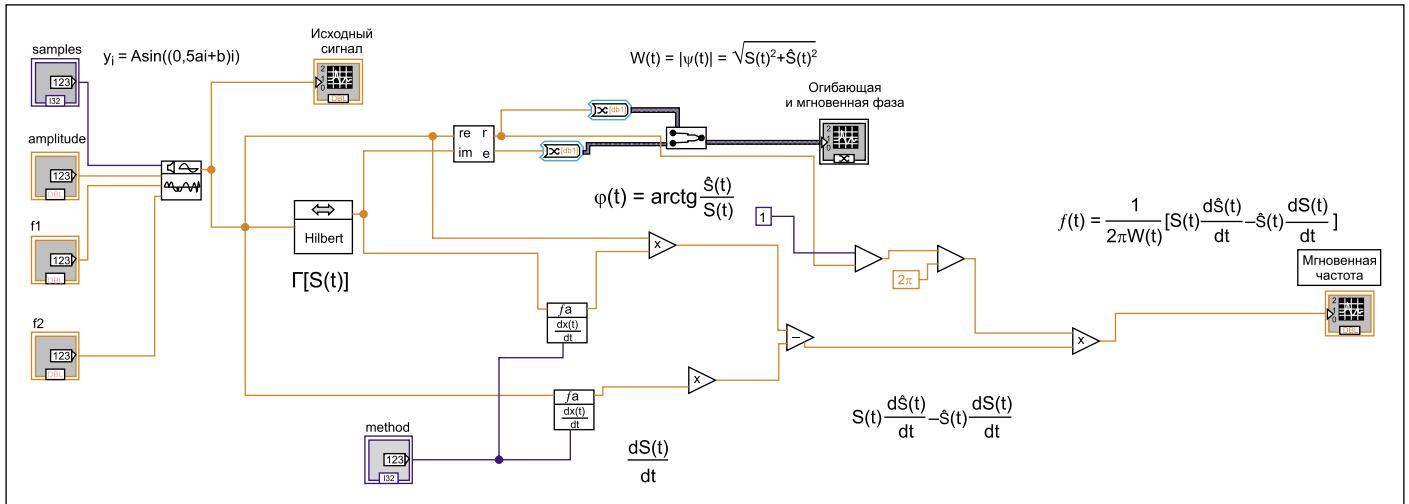


Рис. 3. Структурная схема формирователя огибающей  $\omega(t)$ , мгновенной фазы  $\varphi(t)$  и мгновенной частоты  $f(t)$  входного сигнала  $s(t)$

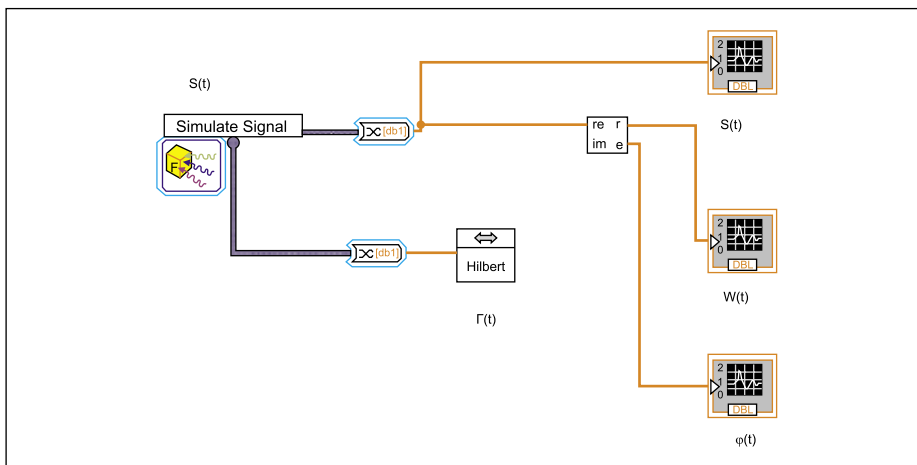


Рис. 2. Структурная схема формирователя огибающей  $\omega(t)$  и мгновенной фазы  $\varphi(t)$  входного сигнала  $t$

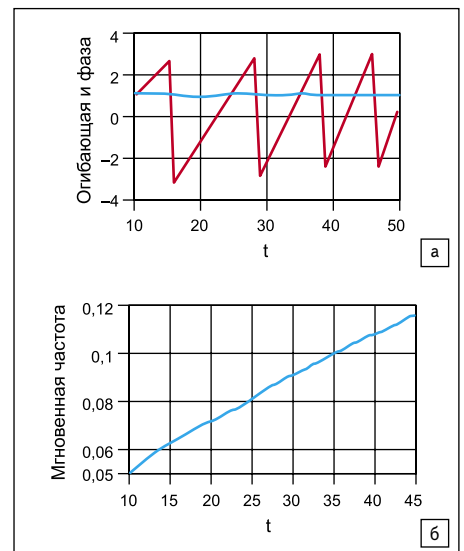



Рис. 4. Огибающая аналитического ЛЧМ-сигнала: а) мгновенная фаза; б) мгновенная частота

В пакете прикладных программ LabVIEW реализован алгоритм построения преобразования Гильберта входного сигнала  $s(f)$ .

Он отображается пиктограммой  и включает в себя последовательное выполнение следующих операций:

- Преобразование Фурье входной последовательности  $X: Y = F(X)$ .
- Обнуление постоянной составляющей:  $Y_Q = 0.0$ .
- Выполнение логической операции: если длина последовательности четна, то компонента на частоте Найквиста приравнивается к нулю.
- Выполнение операции формирования последовательности  $H_k: H_k = -j \text{sign}(k) Y_k$ .

Полученное преобразование Гильберта  $\hat{s}(t)$  сигнала  $s(t)$  используется для формирования огибающей сигнала  $\omega(t)$ , его мгновенной частоты  $f(t)$  и мгновенной фазы  $\varphi(t)$ . Так, для определения огибающей и мгновенной фазы входного сигнала найденный выше массив данных необходимо преобразовать согласно (3) и (5). Утилита, реализующая алгоритм указанного преобразования, изображена на рис. 2.

Для определения мгновенной частоты  $f(t)$  выполняется последовательность действий согласно (4).

Структурная схема формирователя огибающей  $\omega(t)$ , мгновенной фазы  $\varphi(t)$  и мгновенной частоты  $f(t)$  входного сигнала  $s(t)$  представлена на рис. 3.

### Примеры

Приведем результаты моделирования аналитических сигналов с помощью преобразования Гильберта для наиболее часто употребляющихся сигналов.

1. ЛЧМ-сигнал формируется в соответствии с формулой:

$$y_i = A \sin((0,5ai + b)i), \text{ для } i = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

где  $A$  — амплитуда;  $a = 2\pi(f_2 - f_1)/n$ ;  $b = 2\pi f_1$ ;  $f_1$  — начальная частота;  $f_2$  — конечная частота;  $n$  — число отсчетов.

Огибающая мгновенная фаза и мгновенная частота аналитического ЛЧМ-сигнала представлены на рис. 4.

2. Затухающий сигнал формируется в соответствии с формулой:

$$e^{\alpha t} \sin(\Omega t),$$

где  $\alpha$  — величина затухания;  $\Omega$  — несущая частот.

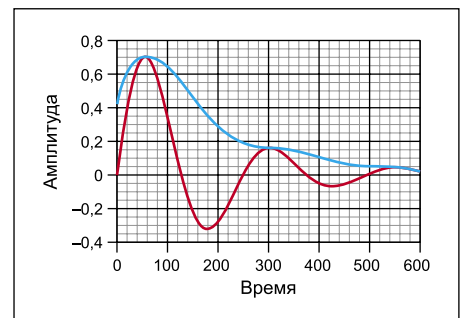


Рис. 5. Сигнал и огибающая затухающего аналитического сигнала

Огибающая затухающего аналитического сигнала представлена на рис. 5.

3. АМ-сигнал формируется в соответствии с формулой:

$$(1+m\sin(\Omega t)) \times \sin(\omega t),$$

где  $\omega$  и  $\Omega$  — несущая и модулирующая частоты;  $m$  — индекс глубины модуляции.

Огибающая мгновенная фаза и мгновенная частота аналитического АМ-сигнала представлены на рис. 6.

4. Фронт радиоимпульса формируется в соответствии с формулой:

$$\text{Heaviside}(t-T) \times \sin(\omega t),$$

где  $\omega$  — несущая частота;  $\text{Heaviside}(x)$  — функция Хэвисайда;  $T$  — величина времени задержки относительно  $t = 0$ .

Фронт радиоимпульса и его огибающая представлены на рис. 7.

Таким образом, с помощью пакета LabVIEW можно формировать и анализировать различные типы аналитических сигналов. ■

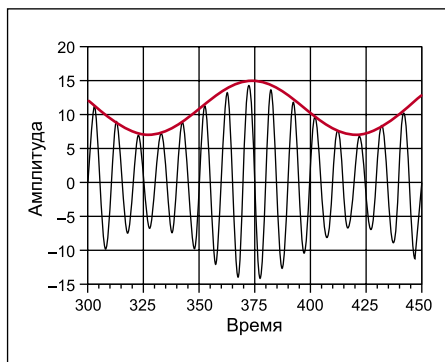


Рис. 6. АМ-сигнал и его огибающая

### Литература

1. Вопросы подповерхностной радиолокации. Коллективная монография / Под ред. А. Ю. Гринева. М.: Радиотехника, 2005.
2. Френкс Л. Теория сигналов / Под ред. В. Е. Вакмана. М.: Советское радио, 1974.
3. Суранов А. Я. LabVIEW 8.20. Справочник по функциям. М.: ДМК Пресс, 2007.

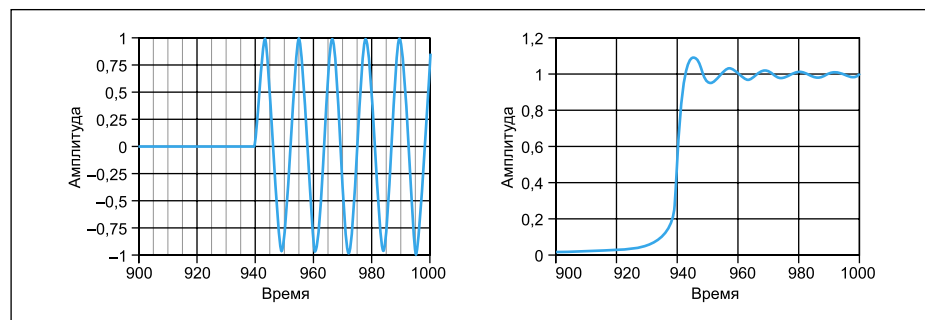


Рис. 7. Фронт радиоимпульса и его огибающая